

22 劉維爾定理

利用第3節的一次因式檢驗法，很容易知道： $\sqrt{2}$ 不是有理數，也就是說，對任意整數 $p \neq 0$ 與 q 恆有

$$\sqrt{2} \neq \frac{q}{p} \Rightarrow 2p^2 \neq q^2 \Rightarrow |2p^2 - q^2| \geq 1 \text{ (因為 } 2p^2 - q^2 \text{ 是整數)。$$

劉維爾定理就是在考慮像 $\sqrt{2}$ 這種無理數與有理數（分數） $\frac{q}{p}$ 差的範圍。

定理 22.1 無理數 $\sqrt{2}$ 的劉維爾定理：

(1) 證明：對所有的正整數 p, q 恆有

$$\left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| > \frac{1}{3p^2}.$$

(2) 將 $\sqrt{2}$ 表為2進位為

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, 1\}$ 。證明：對任何正整數 n ,

$$a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$$

不全為0。

【證明】先證明(1)：分成三種情形討論如下：

(a) 若 $\frac{q}{p}$ 是一個正整數，則可以令 $p=1, \frac{q}{p}=q$

$$|\sqrt{2} - q| \geq 0.4 > \frac{1}{3 \cdot 1^2}.$$

(b) 若 $0 < \frac{q}{p} \leq \frac{3}{2}$ ，則 $\sqrt{2} + \frac{q}{p} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

$$\begin{aligned} \left| 2 - \frac{q^2}{p^2} \right| &= \left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| \left| \sqrt{2} + \frac{q}{p} \right| < 3 \left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| \\ \Rightarrow \left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| &> \frac{|2p^2 - q^2|}{3p^2} \geq \frac{1}{3p^2}. \end{aligned}$$

(c) 若 $\frac{q}{p} > \frac{3}{2}$ 且 $p \geq 2$ ，則

$$\left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| > \frac{3}{2} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{3 \cdot 2^2} \geq \frac{1}{3 \cdot p^2}.$$

綜合(a), (b), (c)證得(1)的結果。

其次證明(2)：

令

$$\frac{q}{p} = 1 + \frac{a_1}{2^1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}},$$

則得到 $p \leq 2^{n-1}$. 代入(1)的公式得到

$$\left| \left(\frac{a_n}{2^n} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^{2n}} \right) + \left(\frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} + \cdots \right) \right| = \left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| > \frac{1}{3p^2} \geq \frac{1}{2^{2n}}.$$

因為

$$\frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} + \cdots \leq \frac{1}{2^{2n+1}} + \cdots \leq \frac{1}{2^{2n}},$$

所以

$$\frac{a_n}{2^n} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^{2n}} \neq 0.$$

因此 $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ 不全為 0。

無理數 $\sqrt{2}$ 的劉維爾定理告訴我們：如果分數 $\frac{q}{p}$ 很接近 $\sqrt{2}$ ，那麼分數 $\frac{q}{p}$ 分母 p 必須很大

(由定理 22.1 (1) 得到)。事實上，我們可用類似的方法求取其它代數數，例如

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots, \sqrt[3]{2}, \dots$$

與有理數的距離不等式。

定理 22.2 證明：對所有的正整數 p 及整數 q 恆有

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right| > \frac{1}{10p^3}.$$

【證明】當 $\left| \sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right| \geq 1$ 時，顯然成立，因此我們假設

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right| < 1.$$

由

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[3]{2^3} - \left(\frac{q}{p}\right)^3 \right| &= \left| \left(\sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right) \left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 \right) \right| \\ &= \left| \left(\sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right) \left(\left(\sqrt[3]{2} - \frac{q}{p}\right)^2 - 3\sqrt[3]{2} \left(\sqrt[3]{2} - \frac{q}{p}\right) + 3\sqrt[3]{4} \right) \right| \\ &< \left| \sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right| (1 + 4 + 5) \quad (\text{利用 } \sqrt[3]{2} < 1.26) \\ &\leq 10 \left| \sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right| \end{aligned}$$

及

$$\frac{1}{p^3} \leq \left| \frac{2p^3 - q^3}{p^3} \right| = \left| \sqrt[3]{2^3} - \left(\frac{q}{p}\right)^3 \right|$$

證得。

習題 22.1 若正整數 p 與 q 滿足

$$\left| \sqrt{2} - \frac{q}{p} \right| < 0.0001,$$

則必須 $p \geq 58$ 。

習題 22.2 證明

(1) 設 p, q 為互質的正整數。證明

$$\left| \sqrt{17} - \frac{q}{p} \right| > \frac{1}{9p^2}.$$

(2) 將 $\sqrt{17}$ 表為 3 進位為

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, 1, 2\}$ 。證明：對任何正整數 $n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ 不全為 0。

習題 22.3 試求滿足下列條件的最小正整數 n ：對所有的正整數 p, q 恆有

$$\left| \sqrt{5} - \frac{q}{p} \right| > \frac{1}{np^2}.$$

習題 22.4 證明：對所有的正整數 p 及整數 q 恆有

$$\left| \sqrt[3]{2} - \frac{q}{p} \right| > \frac{1}{6p^3}.$$

動手玩數學

給定一個正整數 N ，甲、乙輪流來玩一則拆數遊戲，規則如下：甲先將 N 拆成兩個正整數的和，接下來乙必須從這兩個正整數中選擇一數，並且將此數再拆分成兩個正整數的和。然後又輪回到甲（從乙所拆的兩正整數中，選擇一數，並將其拆分成兩正整數的和）做拆數工作，如此繼續下去。最後無法選擇數來做拆分的人輸。試問：哪些正整數 N 會讓甲有必勝的拆分策略，拆分策略又為何？

挑戰題

證明數列 $\langle C_n \rangle$

$$C_n = \left[2^n \cdot \sqrt{2} \right]$$

中有無窮多個偶數。(註：[]代表高斯符號)

一個十進位問題

將 $\sqrt{2}$ 表為十進位時

$$\sqrt{2} = 1.4142\dots$$

一個有趣且很難的問題是說：4 是否出現無窮多次。當然也可以問其它的阿拉伯數字是否亦出現無窮多次。

一般數學家猜想任一個阿拉伯數字都會出現無窮多次，而且會很均勻的出現。如果是這樣子的話， $\sqrt{2}$ 的小數部份就是很好的亂數，也是賭博機器上最好的亂碼。有關這方面的問題還沒有很漂亮的結果。